

Quiz Μαθηματικής Αντίληψης

Διάρκεια 60 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1 (Εις άτοπον απαγωγή) Η εις άτοπον απαγωγή, είναι μια αποδεικτική μέθοδος στα μαθηματικά κατά την οποία αν έχουμε μία πρόταση p (υπόθεση) και μια πρόταση q (συμπέρασμα), προκειμένου να αποδείξουμε ότι **όταν αληθεύει η p , τότε αληθεύει η q** , ξεκινάμε υποθέτοντας **πάντα** ότι η q είναι ψευδής (εσφαλμένη υπόθεση).

- Αν δεν χρησιμοποιήσουμε άμεσα την αλήθεια της πρότασης p , τότε η εσφαλμένη υπόθεση μας οδηγεί σε μία νέα πρόταση r , το νόημα της οποίας είναι ακριβώς το αντίθετο από αυτό της p (μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής).
- Αν από την άλλη μεριά χρησιμοποιήσουμε άμεσα την αλήθεια της p , σε συνδυασμό με την εσφαλμένη υπόθεση οδηγούμαστε σε μία νέα πρόταση r , η οποία είναι (φανερά) ψευδής και φαινομενικά άσχετη με τις δύο προηγούμενες υποθέσεις μας.

Σε κάθε κατάληξη παίρνουμε αντίφαση, είτε η r δε συσχετίζεται άμεσα με την p (πχ $0 > 1$ ή $x^2 < 0$ ή $e^x + 1 = 0$ κλπ), είτε αυτή έρχεται σε άμεση αντίφαση με την υπόθεση p (πχ αν έχουμε ως υπόθεση p ότι ένα όλα τα στοιχεία ενός συνόλου ικανοποιούν μια ιδιότητα P , και μετά την εσφαλμένη υπόθεση ότι η q είναι ψευδής καταλήξουμε ότι υπάρχει έστω και ένα στοιχείο του ίδιου συνόλου το οποίο δεν ικανοποιεί την αρχική ιδιότητα P , τότε αυτό οδηγεί σε αντίφαση).

(a) Έστω ένας πραγματικός αριθμός x . Εάν,

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } |x| < \varepsilon,$$

υποψιάζεστε ποιός είναι ο αριθμός x ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(b) Έστω ένας φυσικός αριθμός k , ένας άρρητος αριθμός a και ένας ρητός αριθμός b .

- (i) Αν ο αριθμός $k^2 + k + 3$ είναι περιττός, δείξτε ότι ο αριθμός k είναι περιττός. Ισχύει το αντίστροφο;
- (ii) Αν ο αριθμός k^2 είναι άρτιος, δείξτε ότι ο αριθμός k είναι άρτιος. Ισχύει το αντίστροφο;
- (iii) Αν $k \neq 1$, τότε ο αριθμός $\frac{k+1}{k}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (iv) Αποδείξτε ότι $a + b$ είναι επίσης άρρητος.

(c) Ο Αντώνης δεν είναι αδελφός της Μαρίας. Ο Βασίλης είναι αδελφός του Αντώνη. Ο Γιώργος είναι αδελφός της Μαρίας. Είναι ο Βασίλης αδελφός του Γιώργου; (Δεν υπάρχουν ετεροθαλή αδέρφια)

Θέμα 2 (Συντακτικό και Διαίσθηση)

Αρκετές φορές συντακτικό και διαίσθηση συνδυάζονται προκειμένου να δοθεί η απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Πρώτα η διαίσθηση δίνει το αιρέθισμα για το αν (λογικά) η πρόταση που αντιμετωπίζουμε είναι αληθής ή ψευδής (στα δικά μας μάτια) και έπειτα, η απόδειξη δείχνει αν η ικανία μας ήταν σωστή. Για να πραγματοποιηθεί η απόδειξη ορθά, χρειάζεται να έχουμε σωστή σύνταξη (δηλαδή, τοποθέτηση συμβόλων, ποσοδεικτών κλπ στη σωστή σειρά) σε ό,τι και να πούμε, αλλιώς υπάρχει κίνδυνος παρανόησης των όσων έχουμε γράψει από κάποιον άλλο που διαβάζει την απάντησή μας. Εν ολίγοις, πρέπει όλοι να μιλούμε την ίδια γλώσσα και να ακολουθούμε τους ίδιους κανόνες. Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση (με αιτιολόγηση) ως ΑΛΗΘΗΣ ή ΨΕΥΔΗΣ. Ακολουθώντας δίνονται οι ορισμοί:

• «Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άνω φραγμένη** (αντ. **κάτω φραγμένη**), αν υπάρχει $M > 0$ (αντ. $m > 0$) ώστε $f(x) \leq M$, (αντ. $m \leq f(x)$), για κάθε $x \in A$. Τα M και m λέγονται **άνω** και **κάτω φράγμα** της f , αντίστοιχα. Η f λέγεται **φραγμένη** αν είναι **άνω** και **κάτω φραγμένη**».

• «Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει **μέγιστη** και **ελάχιστη τιμή**, αν είναι φραγμένη και μάλιστα υπάρχουν $x_\epsilon, x_\mu \in A$ για τα οποία $f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq f(x_\mu)$, για κάθε $x \in A$ ».

- (i) Η συνάρτηση $f(x) = x, x \in (0, +\infty)$ είναι φραγμένη.
- (ii) Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}, x \in [1, +\infty)$ είναι φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή.
- (iii) Η συνάρτηση $f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in (0, +\infty)$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

- (iv) Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in [-2, 0) \cup (0, 1]$ έχει μέγιστη αλλά όχι ελάχιστη τιμή.
- (v) Υπάρχει συνάρτηση φραγμένη η οποία να έχει μέγιστη αλλά όχι ελάχιστη τιμή.
- (vi) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , \quad x \geq 1, \\ -\frac{1}{x} & , \quad x \leq -1, \end{cases}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
- (vii) Αν για μια $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει $M > 0$ και $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) > M$, τότε η συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη
- (viii) Αν για μια $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή ταυτίζονται, τότε η f είναι σταθερή.
- (ix) Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι κάτω φραγμένη, αν και μόνο αν, για κάθε $x \in A$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $f(x) \geq m$.
- (x) Για τυχούσα μη σταθερή συνάρτηση, ενδέχεται ένα άνω φράγμα να είναι ίσο με ένα κάτω φράγμα.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!

